Progressão Aritmética

De onde partir

- ✓ É legal saber os conceitos de sequência, compreender os conceitos associados a funções do tipo afim e entender que uma soma sucessiva equivale a um produto

Onde você vai chegar

- ✓ Será capaz de calcular termos genéticos de uma sequência, tal como a soma de uma coletânea de termos de uma sequência
- ✓ Perceber qual a relação entre as posições de termos de uma sequência e o número de razões utilizadas para ir do primeiro a um termo qualquer da sequência

Teoria

Observe a sequência:

$$(5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots)$$

Podemos notar que a diferença entre um termo qualquer dessa sequência e seu antecedente é sempre igual a 3 (a partir do segundo).

$$8 - 5 = 3;\ 11 - 8 = 3;\ 14 - 11 = 3;\ 17 - 14 = 3;\ 20 - 17 = 3; \dots$$

Definição
Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência numérica de números reais na qual a diferença entre um termo qualquer (a partir do $2^{\underline{o}}$) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante). Essa constante é a chamada razão da P.A. e é indicada por r.

Classificações de uma P.A.

De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Aritméticas da seguinte forma:

- Se $r > 0$, a P. A. será crescente;
  Exemplo: $(5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots) \rightarrow r = 4$

- Se $r = 0$, a P. A. será constante, com todos os termos de igual valor;
  Exemplo: $(5,5,5,5,5,5,5, \dots) \rightarrow r = 0$

- Se $r < 0$, a P. A. será decrescente.
  Exemplo: $(8, 1, -6, -13, -20, \dots) \rightarrow r = -7$

Termo geral da P.A.

Sejam:

a_n um termo genérico da P.A.

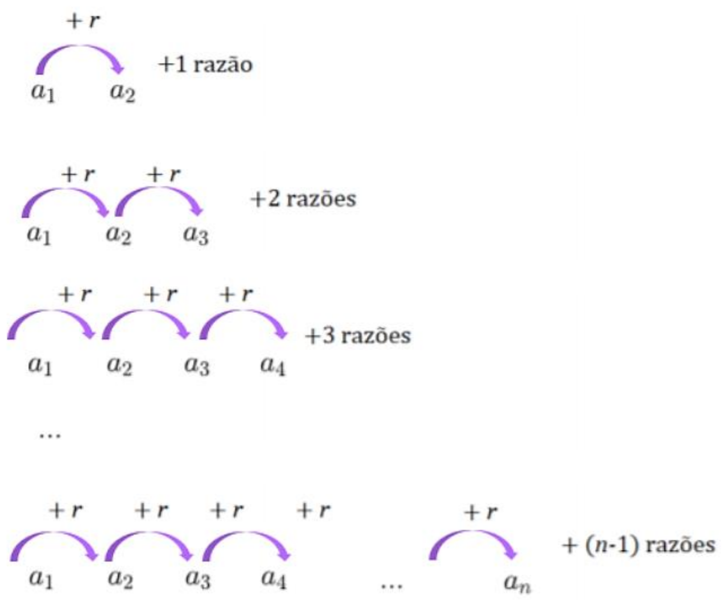
a_1 o 1º termo da P.A.

n é a posição do termo

r é a razão da P.A.

Observe a imagem abaixo. Ela mostra que para ir de a_1 para a_2, devemos adicionar uma razão. Para ir de a_1 para a_3, adicionamos duas razões. Para irmos de a_1 para a_4, somamos três razões, e assim sucessivamente. Em linhas gerais, o número de razões que devemos somar ao termo a_1 para que cheguemos a um termo a_n qualquer é sempre uma unidade menor do que a posição desse termo.

Por exemplo, para encontrar o vigésimo termo de uma sequência a partir do a_1, deveríamos pensar que $a_{20} = a_1 + \underbrace{(r + r + \cdots + r)}_{19\,razões} = a_1 + 19 \cdot r$.



Por isso, a expressão que nos permite obter um termo qualquer da P.A. é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Exemplo: Dada a P.A. $(-19, -15, -11, \dots)$ calcule o seu décimo primeiro termo.

Primeiro calculamos: $r = a_2 - a_1 \rightarrow r = -15 - (-19) \rightarrow r = 4$

Logo o décimo primeiro termo será:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow a_{11} = a_1 + (11 - 1) \cdot r \rightarrow a_{11} = -19 + 10 \cdot 4 \rightarrow a_{11} = 21.$

A expressão anterior do termo geral de uma progressão aritmética se baseia no primeiro termo da sequência. Contudo, podemos determinar uma expressão para o termo geral a partir de qualquer termo da P.A. Isto é, como para ir de um termo a_k ao termo a_n precisamos somar a a_k um total de $(n-k)$ razões, temos:

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot r; \;\; n > k$$

Obs.: Perceba que essa fórmula para o termo geral é muito parecida com a anterior, só trocamos 1 por k, visto que estamos achando a_n a partir do $k - ésimo$ termo da sequência, e não mais do primeiro.

Propriedades de uma P.A.

1ª propriedade: Soma dos termos equidistantes.
Numa P.A., os termos equidistantes, ou seja, os que estão à mesma distância dos termos extremos da P.A., têm soma igual à soma dos extremos. Ou seja:

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \cdots$$

Quando a quantidade de termos é ímpar, existe um termo central, que será igual a $\frac{a_1 + a_n}{2}$.
Exemplo: Seja a P.A. $(2, ?, ?, x, ?, ?, 38)$, qual é o valor de x?

$$x = \frac{a_1 \; + \; a_n}{2} = \frac{2 \; + \; 38}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

2ª propriedade: Média aritmética.
O mesmo vale visto anteriormente para qualquer termo equidistantes, encontrando o valor do termo do meio entre eles.
Exemplo: Tomando a P.A. $(2, 8, 14, 20, 26, 32, 38)$, se fizermos para quaisquer termos equidistantes encontramos o termo central entre eles. Observe:

$$a_2 = \frac{a_1 \; + \; a_3}{2} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$a_3 = \frac{a_2 \; + \; a_4}{2} = \frac{8 + 20}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$a_5 = \frac{a_3 \; + \; a_7}{2} = \frac{14 + 38}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

3ª propriedade: Soma dos termos de uma P.A.
Em uma P.A. a soma de todos os seus termos é calculada a partir da relação abaixo:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exemplo: Soma dos termos da sequência $(2, 8, 14, 20, 26, 32, 38)$.

$$\{a_1 = 2\ a_n = 38\ n = 7\ \rightarrow S = \frac{(2+38)\cdot 7}{2} = \frac{40\cdot 7}{2} = 140$$

Se liga!

Gauss $(1777 - 1855)$ era uma criança com bastante gosto pela Matemática. Ele teria descoberto como realizar a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$ de forma ágil aos seus sete, oito, anos. Ainda, o método desenvolvido por ele enquanto criança teria inspirado a fórmula que usamos atualmente para calcularmos a soma dos termos de um P.A.

Na Cultura

Se consideramos o universo Harry Potter, pensemos no torneio tribruxo: um torneio em que três alunos de três escolas de magia disputavam três provas competitivas. Ocorrendo a cada 5 anos, especula-se que ele tenha iniciado em 1297. Entretanto, o torneio teve de ser interrompido em 1792 após um incidente que feriu os diretores das escolas envolvidas. Ele só foi retomado em 1994, ano em que se passam os ocorridos do filme Harry Potter e o Cálice de Fogo na. Assim, os anos do torneio entre 1297 e 1792 formam os elementos da sequência: $(1297{,}1302{,}1307, \ldots ,1792)$. Você seria capaz de calcular quantos torneios tribuxo ocorreram de 1297 a 1792 utilizando as relações de P.A.?

Imagem: Harry Potter Wiki.

Exercícios

1. Um capital de $R\$5.000$ é investido de modo que ele rende $R\$12,00$ por mês. Sobre esse cenário, faça o que se pede:

a) Escreva os termos da sequência cujos elementos são os valores acumulados com essa aplicação a partir do primeiro mês (isto é, com $a_1 = 5012$).

b) Os valores vistos na sequência acima representam uma P.A.? Se sim, qual sua razão?

c) Se essa aplicação for feita até que sejam acumulados $R\$5276,00$, quantos meses se passaram desde o início dessa aplicação (momento em que tínhamos $R\$5000,00$ acumulados)? Utilize em seus cálculos o termo geral da P.A.

d) Considere a função $f(x) = 12x + 5000$. Calcule $f(23)$.

e) Esses dois objetos matemáticos, progressão aritmética e função afim, possuem alguma relação? O que os coeficientes a e b dessa função representam que elementos do termo geral da progressão?

2. Ao fazer o financiamento de sua casa na Caixa Econômica Federal, consideram-se diversos fatores, como renda mensal bruta, se a pessoa realizou financiamentos anteriores, se o cliente é do setor público, dentre outros. Uma pessoa escolheu um plano que utiliza o Sistema de Amortização Constante. Nele, as parcelas iniciais costumam ser mais altas e vão reduzindo de valor ao longo do tempo. Nesse financiamento, um imóvel avaliado em $R\$100.000,00$, estipulava-se um pagamento em X parcelas mensais. Os valores dos encargos (resultantes da soma entre o valor da prestação mensal e outras tarifas) a serem pagos em cada parcela diminuem a cada mês de forma constante. Observe:

Parcela	Valor da parcela (em reais)
1	$844,85$
2	$843,43$
3	$842,01$
...	...
X	$249,87$

Dessa forma:

a) Determine o valor de X. Isso significa que o pagamento das parcelas irá durar quantos anos?

b) Determine o valor pago no total nesse financiamento, sabendo que, além das parcelas, essa pessoa teve de pagar $R\$10.000,00$ de entrada.

c) Calcule em quanto o total obtido anteriormente excedeu o valor estimado do imóvel.

Caso queira realizar sua própria simulação de financiamento de um imóvel, clique aqui.

Gabaritos

1.

a) $(5012, 5024, 5036, 5048, 5060, \dots)$

b) Sim, os termos estão em uma progressão de razão 12, que corresponde ao valor que rende a cada mês.

c) Note que $a_1 = 5012$ (se passou um mês desde o início da aplicação), $a_2 = 5024$ (se passaram dois meses desde o início da aplicação), $a_3 = 5048$ (se passaram três meses desde o início da aplicação), e assim sucessivamente. Assim, se encontramos o valor de n tal que $a_n = 5276$, encontramos quantos meses se passaram. Usando o termo geral:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \rightarrow a_n = 5012 + (n-1) \cdot 12 = 5276$

$(n-1) \cdot 12 = 5276 - 5012 \rightarrow (n-1) \cdot 12 = 264 \rightarrow n - 1 = \frac{264}{12} \rightarrow n - 1 = 22 \rightarrow n = 23$

Logo, passaram-se 23 meses.

d) $f(23) = 12 \cdot 23 + 5000 = 276 + 5000 = 5276$.

e) Funções afim se relacionam com progressões aritméticas pois as leis de formação dessas sequências podem ser interpretadas com funções afins de domínio natural e não nulo (afinal, temos os termos a_1, a_2, a_3, ..., mas não temos de posição negativa ou fracionária). Observe o termo geral: $a_n = 5012 + (n-1) \cdot 12 \rightarrow a_n = 5012 + 12n - 12 \rightarrow a_n = 12n + 5000$. Logo, o coeficiente a da função é igual à razão e o coeficiente b igual a $a_1 - r$ (já que não temos termo a_0 em uma progressão).

2.

a) Se $a_1 = 844{,}85$, $a_n = 249{,}87$ e a razão é igual a $843{,}43 - 844{,}85 = -1{,}42$. Logo, temos que o número de parcelas é dado por:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \rightarrow 249{,}87 = 844{,}85 + (n-1) \cdot (-1{,}42)$

$\frac{249{,}87 - 844{,}85}{-1{,}42} = n - 1 \rightarrow 419 = n - 1 \rightarrow n = 420\, meses = 35\, anos$

b) Realizando a soma dessa progressão e adicionando os $R\$10.000{,}00$ ao final:

$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot 420}{2} = \frac{(844{,}85 + 249{,}87) \cdot 420}{2} = R\$229.891{,}20$

Logo, o total será $229.981{,}20 + 10.000 = R\$239.891{,}20$.

c) Esse valor excede o valor estipulado pelo imóvel em $239.891{,}20 - 100.000 = R\$139.891{,}20$.